技術論文 3

# ガラス円板の熱応力の近似計算法

■千葉工業大学教授　岸井　貫

## 1.冷却に伴う板の破損

ガラスの板形の製品が照明器具・熱器具の部品に使われることは多い．これらは時に破損することがある．破損の原因として，加熱された板のうちで周辺部だけが，冷たいまま残されたか急に冷却されたかして，縁部に，縁に平行に働く張力が発生した（図1）ことを想定するのが自然である．しかしこの想定の正否を論ずるには周辺張力の値を知ることが必要である．その計算や推定は簡単でない．

もしも次のような仮定と近似が許されるならば，問題が多元一次連立方程式を解くことに帰著するのでコンピュータを使って短時間に応力を計算できる：

1．形が円形の平板である，
2．温度は中心からの距離の階段形関数であり，中心に対して点対称的に分布する，および
3．厚さ方向の応力は零である．

このような仮定で得られた結果は実際の場合に対する近似値であるが，議論を進めるためには役立つことが多いであろう．

## 2.応力・伸びの釣合い・連続の条件式

計算に使う式は円柱・円筒殻などに適用される弾性論の基本的なもので，ガラス/金属の円筒形封着体の応力計算にも使用された．これらの式で軸方向応力を零と置くことで，いくらか簡単化され元数が減る．

温度の分布が次のようにN重になっている：

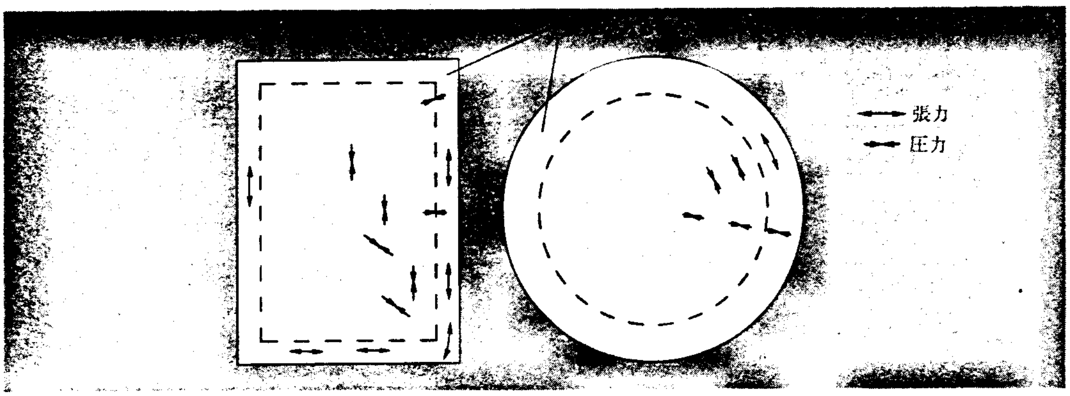



図1　周縁部を冷やされた板の中の応力分布．縁には周辺切線方向の張力が発生する

中心からの距離をrとして（図2）

$r<r_1$ で温度は　　T1

$r_1<r<r_2$　〃　　T2

……………………………………

$r_{N-1}<r<r_N$　〃　　TN

温度分布の境界$r_1$，$r_2$……，$r_{N-1}$では半径方向の応力PRは連続的（作用・反作用の法則）で

$r=0$　で　応力は有限

$r=r_1$　で　$PR_1=PR_2$

……………………………………

$r=r_{N-1}$で　$PR_{N-1}=PR_N$

$r=r_N$　で　$PR_N=0$（最外側）

（式の数はN+1個である.）

また切線方向の伸びeTは連続（境界に直角な裂け目と境界面でのはがれが起きない）で

$r=r_1$　で　$eT_1=eT_2$

……………………………………

$r=r_{N-1}$　で　$eT_{N-1}=eT_N$

（式の数はN−1個である.）

軸方向の応力は零と仮定したので応力・伸びとも考える必要がない.

半径方向の応力はrの関数として

$PR_1=A1-B1/r^2$

$PR_2=A2-B2/r^2$

……………………………………

$PR_N=AN-BN/r^2$

切線方向の応力PTもrの関数として

$PT_1=A1+B1/r^2$

……………………………………

$PT_N=AN+BN/r^2$

切線方向の伸びeTは

$eT=PT/E-\sigma\cdot PR/E+k\cdot T$

ここでE：ヤング率；$\sigma$：ポアソン比；

k：熱膨張係数

この式の右辺の第1，第2項は応力による弾性変形，第3項は熱膨張に原因する変形である.

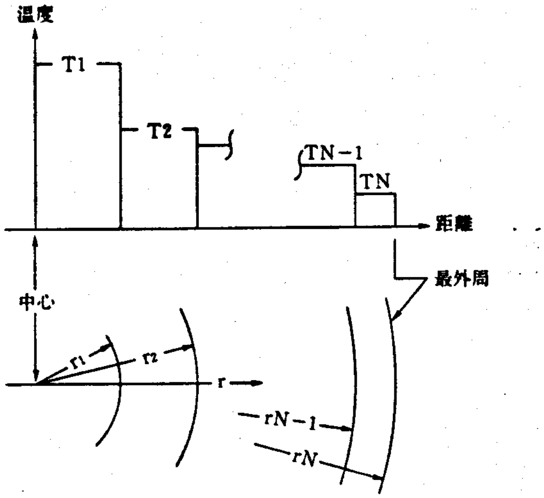



図2　円板に仮定された温度分布

我々の目的は定数係数AとBをすべて求め，次にPRとPTを計算することである.

## 3.穴の影響

中実（穴が明いていない）な板であれば，

$r=0$でPRとPTが有限であるから，

$B1=0$が成り立つ.

中央に半径$r_0$の穴が明いていると（図3），

$r=r_0$で$PR=0$の条件から$A1=B1/r_0^2$

が成り立つ.

外縁では$PR=0$から$AN=BN/r_N^2$

が成り立つ.

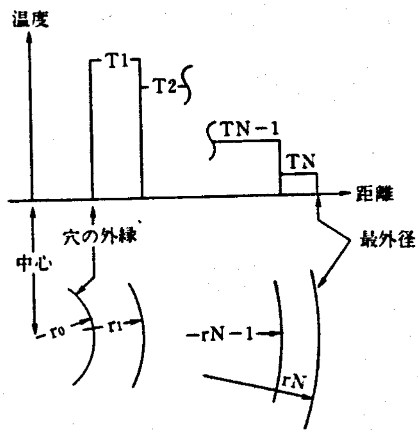



図3　中心に穴がある円板に仮定された温度分布

## 4.多元一次連立方程式

前記の2N個の関係式を書き下して整理すると2N個の元を持つ2N個の一次方程式になる．多元一次連立方程式を解くプログラムは広く知られているので，直ぐに適用できる．

前記関係式のうち$r=r_1$でのものだけを参考のために書き下して置く：

PRの連続：$A1-B1/r_1^2=A2-B2/r_1^2$

eTの連続：

$A1+B1/r_1^2-\sigma\cdot(A1-B1/r_1^2)+E\cdot k\cdot T1$
$=A2+B2/r_1^2-\sigma\cdot(A2-B2/r_1^2)+E\cdot k\cdot T2$

実際に式を整理してみると，各式はそれぞれ未知数項を4項以下しか含まず，式内に現れる係数の三分の一は1または−1であるから，元数に比べての代数計算やコンピュータの計算時間は短い．

## 5.計算上の問題点と対策

中央に穴がある板では，式と元とをすなおに並べてプログラムするだけで計算が実行され合理的な値が得られた．半径を10個の領域に分割し元が20個になっても問題なく，1分間以内に計算が終わった．

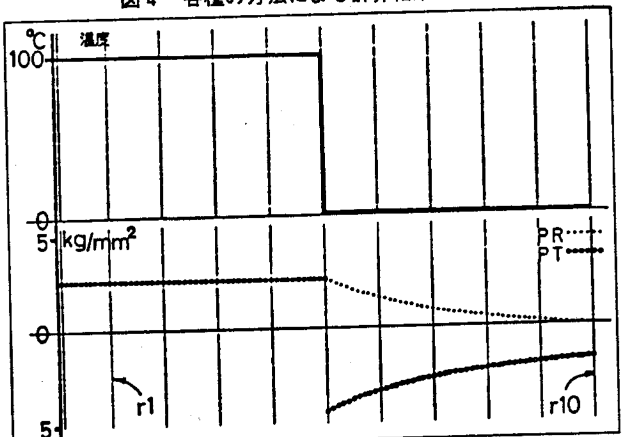
これとは反対に穴がない場合には，

・「零で割る」エラーが出る，
・式の配列を変えて計算が遂行できても結果が不合理である，
・「整数指定」をするとエラーが出やすい，

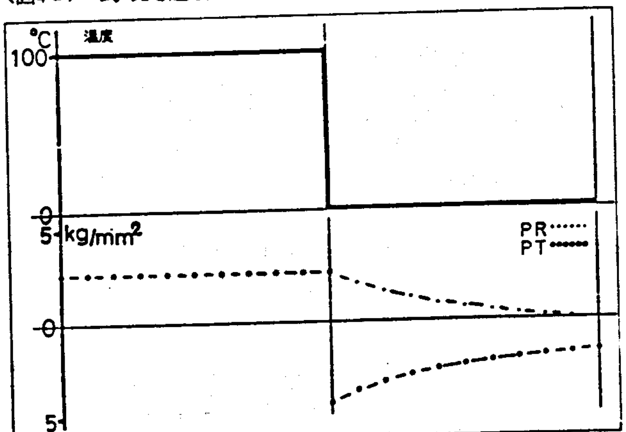
などの問題があった．この原因の一つにB1=0という零係数の多い式がある．

元と式の双方を自然な順序の逆順にして計算すると問題がなくなった．

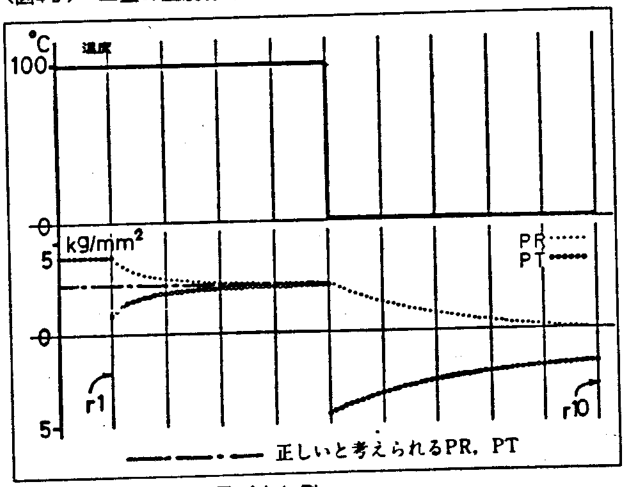
図4　各種の方法による計算結果の比較



〈図4 a〉　式・元を逆順にする対策を施したプログラムによる結果



〈図4 b〉　二重の温度分布だけを仮定して計算した結果



〈図4 c〉　不合理な結果が出た例

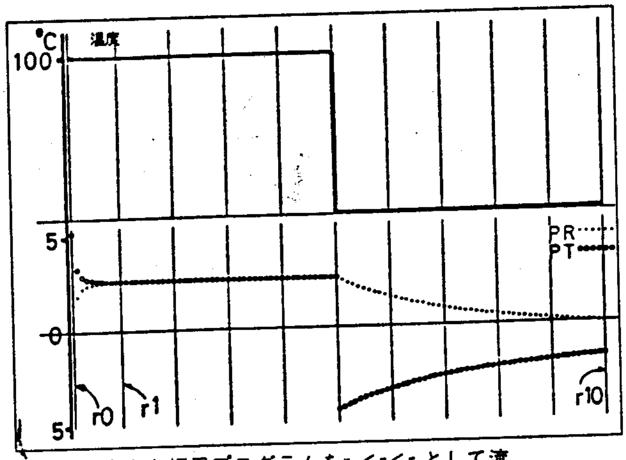


図4d　穴あき板用プログラムを$r_0<r<r_1$として流用して得た結果

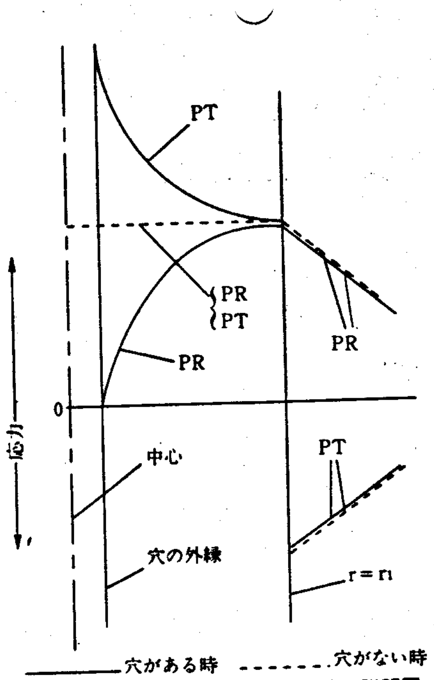


図5　穴の有無による応力分布の差の説明図

この対策を施して計算した結果の例を図4aに掲げ，始めから温度の二重分布を仮定した計算（図4b）と比較した．図4cは不合理な結果が出た例である．

元と式を逆順にする繁雑さを避けるための次善の方法として，穴のある板のプログラムを使い穴の直径$r_0$を$r_1$より十分小さくし，$r=r_1$付近のPR・PTの値を$0 \leqq r < r_1$での値として流用するのも実用上十分である（図4d，図5）．

図4aとbは全く合致し，また$r=0$付近を無視すれば図4dとも一致する．

## 6.応力分布の一般的性質

応力の値と分布とは半径/最外径の比と温度の関係だけによって決まり最外径の大小にはよらない．図6～9では横軸が半径方向の長さに対応しているが，上記の事情があるので横軸には目盛を記入していない．$r_{10}$が最外径，$r_0$が穴の外径である．また図の上半が温度分布，下半分が応力分布である．応力分布図では横軸より上が圧縮力，下が張力を表す．

応力が圧縮力か張力かに対しては温度分布の形が影響するが，温度の絶対値はそれほど関係がない．温度分布曲線を水平の廻転軸によって180°回転させると，応力では　圧縮力←→張力　の反転が起きる．温度差は正比例の関係で応力の絶対値に影響する．

## 7.計算例

ヤング率$E=7000$kg/mm²，膨張係数$k=100\times10^{-7}$℃$^{-1}$，ポアソン比$\sigma=0.25$と置いて試算した．これらの値は板ガラスや瓶ガラスなどの軟質ガラスに近い．

### 7-1　外周の冷却

外周だけを冷やすと縁に大きいPT（張力）が生ずる（図6－1）．温度勾配を緩くしてもPTの絶対値はわずか減るだけである（図6－2）．このPTが破損の原因になり易いことは良く知られている．

逆に外周だけを加熱すれば縁に平行な圧縮応力が発生する．勾配を極端に緩くしてはじめてはっきり応力の減少が認められる（図6―3）．

図6は中央に小穴があるとして計算したが，外周の応力に関しては穴の有無は関係がない．

図6　周辺部を冷却したことの効果．図6—1→図6—3の順に温度勾配が緩い．中央部に小穴がある

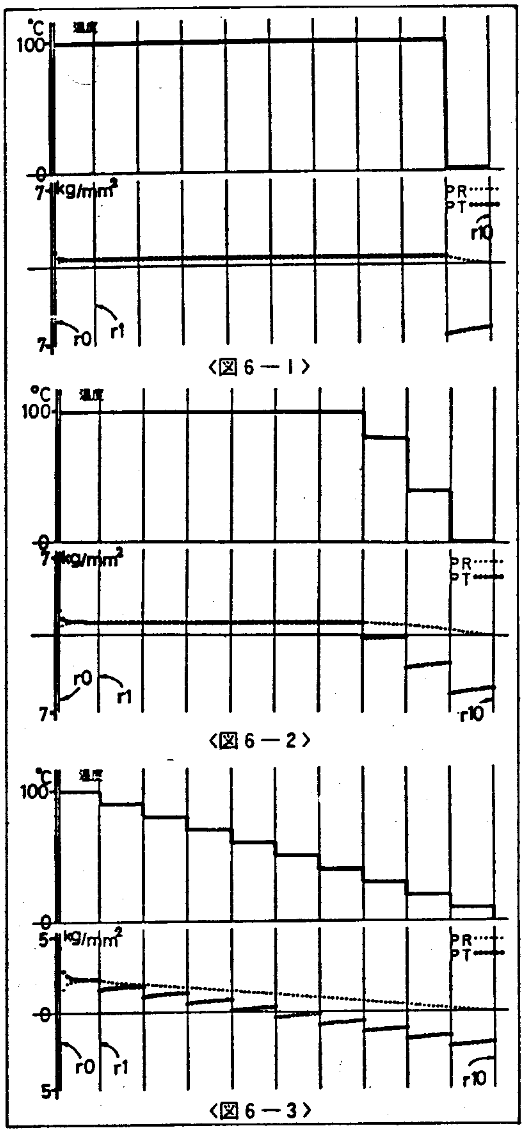
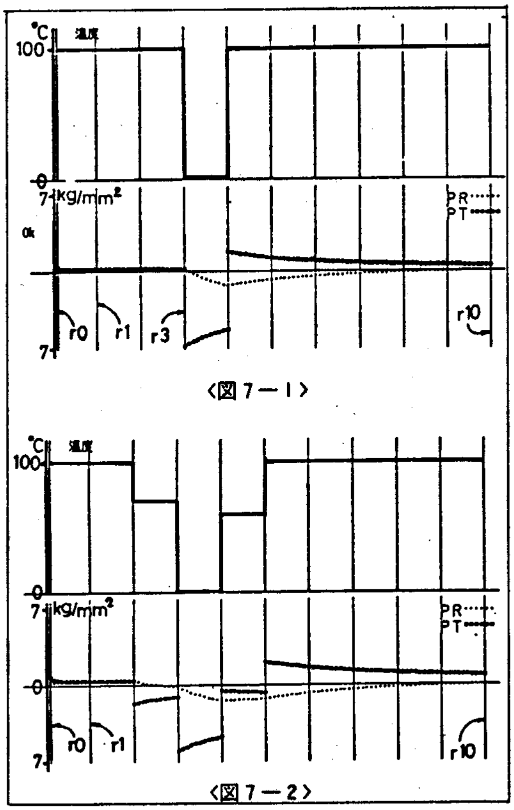



図7　中間部を冷却したことの効果．図7—1→図7—2の順に温度勾配が緩い




## 7-2　中間部の冷却

図7は中央に小穴があるとして描いたが，穴の有無は中間部の大きい応力には影響がない．

温度勾配が急でも（図7—1）緩くても（図7—2）応力の最大値はほとんど同じであった．

## 7-3　中央部の冷却——穴なし板の場合

5．で記したように$r_1$を小さくして計算した（図8）．r＝0付近の値は$r_2$付近の応力の値を流用しなければならない（図8の鎖線）．冷却された部分が狭くても（図8—1）広くても（図8—2），温度勾配が緩くても（図8—3）応力の最大値はほぼ同じである．

## 7-4　中央部の冷却——穴明き板の場合

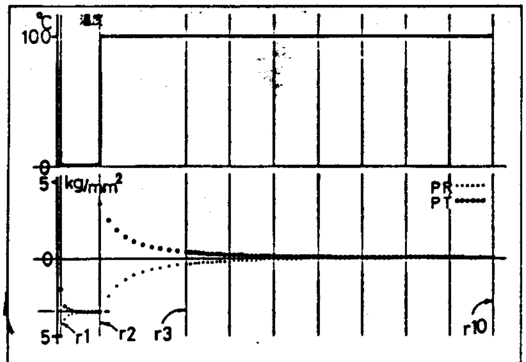
穴の周囲にPTの応力集中が起きる．逆にPRは零へ近づく（図9）．穴が小さいと応力集中が明瞭である（図9—1）．しかし穴が大きくなっても（図9—2，図9—3）PTの最大値は大体同じままである．

# 8．観察結果のまとめ

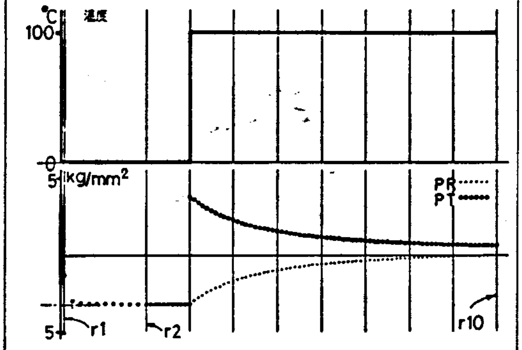
以上のような計算から次のような経験則が得られる：

・応力の絶対値には最高/最低温度の差が効果を持っている，

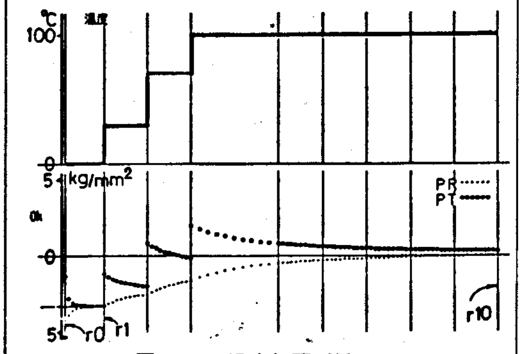
図8　穴なし板の中心部を冷却したことの効果. 中央部の水平の一点鎖線は正しいと想定される応力を示す.




〈図8－1〉冷却部が狭い




〈図8－2〉冷却部が広い




〈図8－3〉温度勾配が緩い

・それに比べると温度勾配の効果は小さい, および, ソーダ石灰ガラスの場合

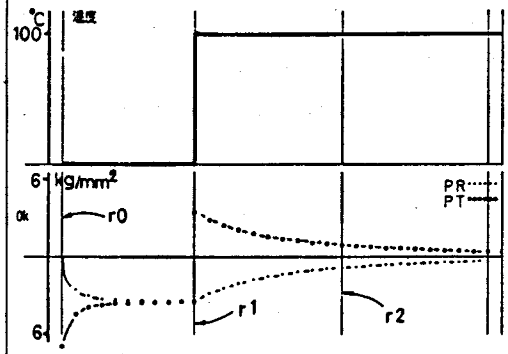
・温度差100℃が応力の5 kg/mm²くらいに対応する.

この程度の簡単な経験則でも破損原因究明には相当役立つであろう.

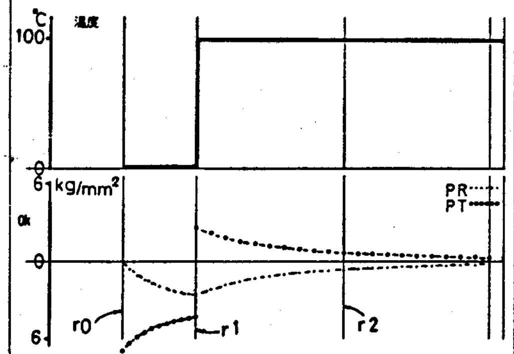

〈引用文献〉 1）　岸井　New Glass Technology 1巻　3号　23頁　昭和57年


図9　穴あき板の中心部を冷却したことの効果

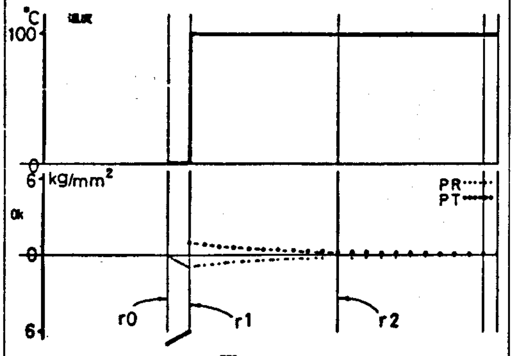
図9－1→図9－3の順に穴（外径＝r0）が大きい




〈図9－1〉




〈図9－2〉




〈図9－3〉


〔著者紹介〕

岸井　貫（きしい　とおる）

昭和25年3月東京大学理学部物理学科卒業, 同年4月東芝入社, 硝子技術部（現東芝硝子), 昭和38年8月東芝中央研究所. 同総合研究所を経て計測器の販売と開発に従事. 昭和58年10月東芝硝子㈱入社. 昭和46年～47年カリフォルニア大学ロサンジェルス校客員研究員, 工学博士(東京工業大学), 平成元年度科学技術庁長官賞（光弾性）現千葉工業大学教授.