

Stokes の法則に基づく粘度測定法

理学博士 工学博士 芝 龜 吉

Stokes の法則

流体の流れの中におかれている静止固体は、一般に流れから力を受ける。その力の流れの方向の分力を抗力といい、それに垂直な方向の分力を揚力という。なお、流れと固体との相互作用は、その相対運動だけで定まるので、流れの中に静止固体がおかれている場合も流体の中に固体が運動している場合も同様である。

抗力 F_0 は摩擦抗力 F_f と圧力抗力 F_p との和であると考えられ、

$$F_0 = F_f + F_p \quad \dots\dots\dots(1)$$

が全抗力である。

圧力抗力 F_p は、動圧と相対速度の方向に垂直な平面への投影面積 A との積に係数 C_p を掛けた

$$F_p = C_p \rho \cdot \frac{v^2}{2} A \quad \dots\dots\dots(2)$$

で与えられる。 ρ は流体の密度、 v は相対速度である。

一方、摩擦抗力 F_f は、管内の流れが層流である場合と同様に、相対速度 v に比例し、粘度 η に比例し、相対速度に平行な接触面積に比例する。しかし、便宜上、式(2)と同形の

$$F_f = C_f \rho \cdot \frac{v^2}{2} BL \quad \dots\dots\dots(3)$$

と書くことが多い。ここに、 L は流れに平行な接触面の長さ、 B はそれに垂直な幅である。このようにすると、全抗力は、

$$F_0 = C_0 \rho \cdot \frac{v^2}{2} A \quad \dots\dots\dots(4)$$

なる式で表わされる。

固体が直径 $D (= 2r)$ の球であるとする。この場合には、 $R_0 = vD/\nu$ を Reynolds 数とする。 ν は動粘度で $\nu = \eta/\rho$ である。球については、 $A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} D^2$ である。

球についての R_0 と C_0 との関係は、実験の結果とし

て、図1の通りであることが知られている。

$R_0 < 1$ ならば、摩擦抗力のみであるとみられ ($F_0 = F_f$),

$$F_f = 3\pi\eta vD \quad \dots\dots\dots(5)$$

なる Stokes の法則が成り立つとされている。この場合には

$$C_0 = 24/R_0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

である。

Stokes の法則は、流体が Newton 流体であり、球と流体との間にすべりがないうちに成り立つと考えられている。

R_0 が1より大きくなると、圧力抗力が無視されなくなり、 $R_0 \approx 1000$ までは R_0 の増加につれて圧力抗力の割合が多くなる。

さらに R_0 が大きくなると、 $R_0 \approx 350,000$ までは、 C_0 が一定で $C_0 \approx 0.45$ とみられる。すなわち、この領域では、抗力が相対速度 v の2乗に比例するとみられる。 R_0 がさらに大きくなると、 C_0 が急に減少して0.2程度になる。

R_0 が1に比して小さいときでも、圧力抗力が少しは存在すると考えられるので、式(5)が厳密に成り立つのは R_0 が非常に小さい場合に限られると考えるべきである。この点については Oseen の研究があり¹⁾、式(5)の代わりに

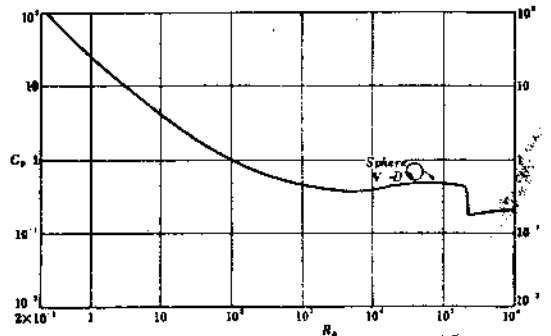


図1 球についての R_0 と C_0 との関係

$$F_b = 3\pi\eta vD \left(1 + \frac{3}{16} R_b\right) \dots\dots\dots (7)$$

とすればよいことが知られている。この場合には

$$C_b = \frac{24}{R_b} + \frac{9}{2} \dots\dots\dots (8)$$

である。

2. 粘度の求め方

Stokes の法則(5)が成り立つとすると、式(6)が成り立ち、抗力 $F_b (= F_f)$ を測定することにより、粘度 η は

$$\eta = \frac{F_b}{3\pi vD} \dots\dots\dots (9)$$

によって求められる。

Stokes の法則に基づく粘度計の中で、現在のところ、理論的に無難なのは、落球粘度計と液体引上式粘度計とだけである。

式(6)ではなく式(8)を採用すべきときに、かりに Stokes の法則が成り立つとして算出した粘度の値を η^* とすると、 η^* は真の粘度 η に等しくない(これを見掛けの粘度という)。 η^* を用いて得られる Reynolds 数(見掛けの Reynolds 数)を R_b^* とすると、これは真の Reynolds 数 R_b ではない。このときには、

$$C_b R_b^* = 24 \dots\dots\dots (10)$$

であるから、この式と式(6)とから、

$$\eta = \eta^* \frac{R_b^*}{R_b} \dots\dots\dots (11)$$

の関係が得られる。

一定温度に保たれている同一の液体について、同一の球を用いていろいろの速度で測定を行うと、Reynolds 数が速度に比例するので、速度 v が大きくなるにつれて、得られる η^* も大きくなる。それで、図 2 のような v と η^* との関係を表わすグラフを作り、 v が 0 となる極限に対

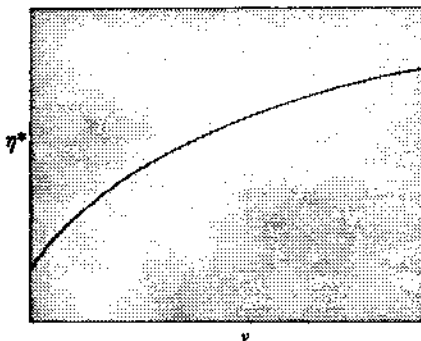


図 2 v と η^* の関係 (概念図)

1) たとえば、川田裕郎：粘度(コロナ社 1969), P71~

応する η^* を求めると、それが真の粘度にほかならない。この方法は、液体引上式粘度計ならば容易に採用されるが、落球粘度計では実施が困難である。

式(10)に式(8)を代入して整理すると、

$$\frac{R_b^*}{R_b} = 1 - \frac{3}{16} R_b^* \dots\dots\dots (12)$$

となり、これを式(11)に代入すると、

$$\eta = \eta^* \left(1 - \frac{3}{16} R_b^*\right) \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ところで、

$$R_b^* = \frac{\rho v D}{\eta^*} \dots\dots\dots (14)$$

であるから、 η^* から真の粘度 η が得られる。

式(13)から、 η^* の誤差 ($\eta^* - \eta$) が

2%	より小さいためには	$R_b^* < 0.1$
1%	"	$R_b^* < 0.05$
0.5%	"	$R_b^* < 0.03$
0.1%	"	$R_b^* < 0.005$

なる条件が必要であることが知られる。

3. 落球粘度計

落球粘度計はかなり古くから用いられている粘度計であるから、多くの著書に記載されている。それで、ここでは略述するに止める。詳しくは、たとえば、川田裕郎の著書「粘度」(コロナ社、1969)参照。

静止液体の中で、固体球が重力と液体からの力とだけを受けて微小速度で落下する場合を考える。

球が受けている力は、重力と浮力と Stokes の法則による抗力とだけであり、これらはそれぞれ

$$\frac{1}{6} \pi D^3 \rho_0 g, -\frac{1}{6} \pi D^3 \rho g, F_b = -3\pi\eta vD \dots\dots\dots (15)$$

である(鉛直下向きを正の方向とする)。ここに、 ρ_0 は球の密度である。

この球が一定速度 v で落下しているならば、それに作用している力の和は 0 である。すなわち

$$\frac{1}{6} \pi D^3 \rho_0 g - \frac{1}{6} \pi D^3 \rho g - 3\pi\eta vD = 0 \dots\dots\dots (16)$$

である。これを整理すると、

$$\eta = \frac{(\rho_0 - \rho)g}{18v} D^2 \dots\dots\dots (17)$$

となる。 g 、 ρ_0 、 D が既知であるとして、 ρ と v との測定値によって粘度 η が知られる。

落下速度が式(16)を満たす速度より小さいときには、球は加速度をもって落下する。速度が増して式(16)を満たす落下速度になると、加速度が 0 となり、その落下速度が不変に保たれる。このように、一定に保たれる落下速度

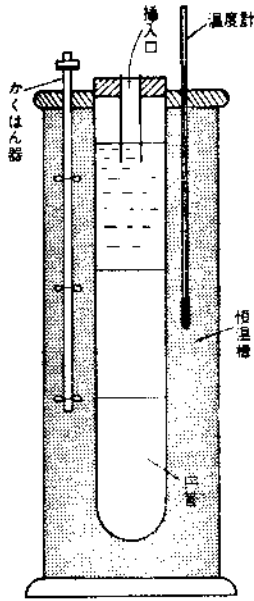


図3 落球粘度計の構造

を終端速度という。

落球粘度計は、終端速度で落下している球の速度 v を測定して、(密度 ρ は知られているとして) 粘度を知る方式の粘度計である。

落球粘度計の構造の概略は、図3に示されている。

試料液体を入れた円管Aを恒温槽B内におき、円管の上部からその円管の軸上に球を落下させるようになっており、あらかじめ印されている2位置 P_1 , P_2 の間を落下するに要する時間の測定値と P_1 , P_2 の距離とから落下速度を求める。円管の上部には、球が円管の中心軸上に落下するために球の直径より少し大きい径の細い管がつけられている。

試料液体を入れる円管が細いと管壁の影響が無視できないので、少なくとも球の直径5倍の径の円管を用いる。

球の位置を外から観測するので、円管も恒温槽も透明であることが必要であり、さらに円管の肉厚が一樣であることが必要である。それは、肉厚が一樣でないと、位置が正しく見えないことがあるからである。

球は、通常、ボールベアリング用の鋼球の中から真球度のよいものを選び出したものが使用される。

1個の球では、1つの試料液体について一通りの終端速度があり得るばかりである。場合によっては、所定位置 P_1 , P_2 の間ではまだ終端速度になっていないこともあり、その場合には粘度測定ができない。

終端速度にならないか、終端速度になってもその速度が大きすぎるかるときには、球をさらに径の小さいものに取り換えて測定を行う。そのために、落球粘度計には、いろいろの径の球が用意されている。

試料液体の粘度の概略値が知られているならば、どの程度の球を用いればよいかつぎのように知られる。

許容される測定誤差によって最大 Reynolds 数が定まっている (たとえば誤差が2%ならば R_{D_m} の最大値は0.1である)。その最大 Reynolds 数を R_{D_m} とすると、

$$R_{D_m} \geq \frac{\rho v D}{\eta} \dots\dots\dots (18)$$

なる条件が満たされていなければならない。

Stokes の法則が成り立つとすると、落下速度 v は

$$v = \frac{(\rho_0 - \rho) g}{18 \eta} D^2 \dots\dots\dots (19)$$

であるから、式(17)と(18)とから

$$D^2 \geq \frac{18 \eta^2 R_{D_m}}{(\rho_0 - \rho) \rho g} \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。これに η の概略値を入れると、使用すべき球の径が知られる。

落球粘度計にはつぎのような短所があると考えられる。

- (1) 被測定液体が透明でなければならない。
- (2) 測定時に終端速度となっているかどうかの判定が困難である。
- (3) 1個の球では、高々、一通りの終端速度での測定しかできない。
- (4) 球の位置を外から観測するので、肉厚の一樣な試料容器(円管)および透明な恒温槽を用いる必要がある。つぎに述べる液体引上式粘度計には、これらの欠点はない。

4. 液体引上式粘度計

流体とその中におかれている固体との相互作用は、両者の相対運動だけで定まるので、静止流体の中に固体が運動しているのと静止固体が流れの中におかれているのとは、同様に取り扱することができる。

落球粘度計が静止液体内で固体球が落下することを利用するのに対して、液体引上式粘度計は静止固体球の入っている液体を引き上げることを利用する。両者はいずれも液体と固体球との相対運動を利用する点で同じである。

4.1 測定原理

図4(次ページ)は液体引上式粘度計の測定原理を説明するための図である。Aは天秤Dの一方の腕に吊るされている球、Bは試料液体、Cはその容器で恒温槽(図には示されていない)に入れられている。

試料液体は容器および恒温槽とともに一定の微小速度で引き上げられるようになっている。

試料液体が静止している状態で天秤をバランスさせる。これによって、球の見掛けの質量(浮力のために見掛け

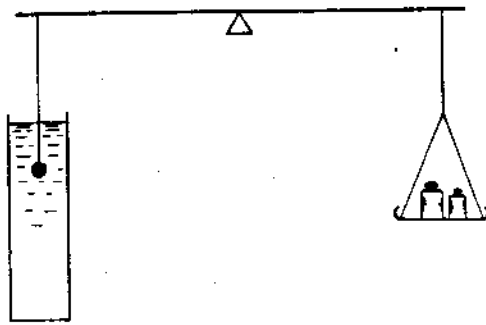


図4 液体引上式粘度計

上減少している質量)が測定される。球の直径および質量が知られているとするので、球の密度 ρ_0 および $(\rho_0 - \rho)$ が知られる(ρ は試料液体の密度)。

つぎに、試料液体が微小速度 v で引き上げられると、球には鉛直上向きの抗力(Stokesの法則による力) $3\pi\eta v D$ が及ぼされるので、球の見掛けの質量が Δm だけ減少する。 Δm は

$$g \cdot \Delta m = 3\pi\eta v D \dots \dots \dots (2)$$

で与えられるので、

適宜に選定した微小速度 v について、見掛けの質量の減少 Δm を測定すれば粘度が知られる。

吊糸に及ぼされている粘性力、および吊糸の液中にある長さが増すための浮力の増加のための誤差があると考えられるが、これらは吊糸を細くすれば小さくなるので、十分に細くすることによって無視される。

4.2 落球粘度計との比較

液体引上式粘度計には、前掲の落球粘度計の欠点がない。

液体引上式粘度計では、直接に測定される量は球の落下速度ではなく、球の見掛けの質量の減少であるから、試料液体、容器および恒温槽が透明である必要がない。また、一定速度で引き上げるので、終端速度になっていることを確める必要がなく、しかも、いろいろの速度で測定ができる。

液体引上式粘度計では、持続されている定常状態で測定が行われるので、落球の速度測定より精度のよい測定が容易に行われる。

液体引上式粘度計では、1つの試料液体について、1個の球を用いていろいろの速度で測定ができるので、2で述べた v と η^* とのグラフを作ることができ、 $v \rightarrow 0$ の極限に対応する η^* を求めることができる。これは、落球粘度計にみられない長所である。

4.3 試作粘度計

液体引上式粘度計は、著者らが研究したもので、まだ

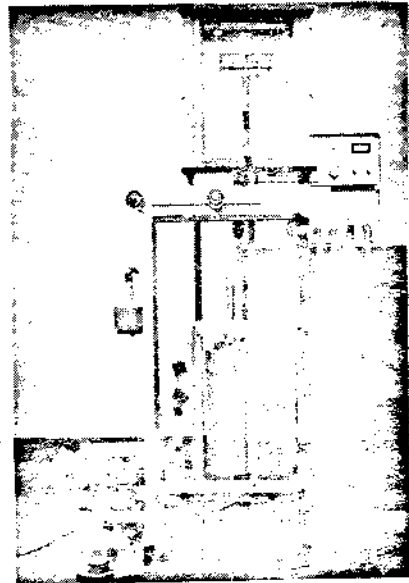


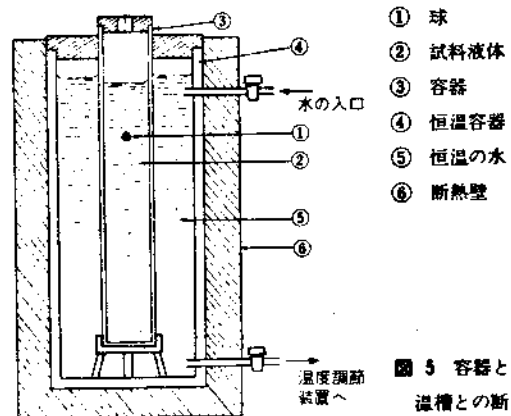
写真 液体引上式粘度計

市販されていない。それで、研究のために試作したものについて説明する¹⁾。

試作粘度計は、写真にみられるように、精密天秤、試料液体を入れる容器および試料を入れたまま容器を引き上げるためのモータなどで構成されている。

天秤は秤量50g、感量1mg(実感量0.1mg)の精密天秤である。天秤の一方の腕に直径10.0mmのボールベアリング用鋼球が直径25 μ m、長さ約75cmの細いテロン糸で吊るされている。

図5は試料液体を入れる容器と恒温槽との断面図である。容器は内径6.3cm、外径7.0cm、長さ約32cmのアルミニウム製の円筒容器であり、その内容積は約1 ℓ である。これが、内径10cm、外径11.5cm、深さ30cmの



- ① 球
- ② 試料液体
- ③ 容器
- ④ 恒温容器
- ⑤ 恒温の水
- ⑥ 断熱壁

図5 容器と恒温槽との断面

1) 芝 龜吉, 杜沢達美: 応用物理 第41巻(1972), P 597~603

水の入った円筒容器を断熱材で囲んだ恒温槽の中に入れてある。

恒温槽内の水は、Peltier 効果による冷却加熱式恒温循環装置に連結されていて、一定温度に調節されている水が6 l/minの流量でたえず循環するようになっている。これによって、試料液体の温度が2 degの精度で一定に保たれる。

一定の微小速度 v で試料液体を引き上げることがこの粘度計にとって最も重要なことであるから、引上装置は十分に注意して製作した。

モータとしては、電源の周波数が一定であれば、電圧および負荷が多少変わっても、一定回転速度を保って回転することが必要である。この試作粘度計ではA.C. 100 V, 50Hz, 6 W, 4極, 1/2rpm(正逆回転可能)で常用トルクが1.5kgw.cmの比較的トルクの大きいシンクロモータを使用した。さらに、いろいろの引上速度を得るために、厚さが5mmでいろいろの直径のアクリル板のプーリー20枚を用意した。これらのプーリーをモータの回転軸に取り付けることによって、引上速度が、0.013~0.75cm/sの範囲で変えられる。なお、引上速度 v を正確に知るために、電動式デジタル・ストップウォッチを用いて粘度測定時の引上速度 v を示させることにした。

容器の上下移動可能な距離は約40cmである。

4.4 実験の結果

実験は、液体引上式粘度計で粘度の絶対測定ができるかどうかを検討する目的で行われた。それには、粘度の知られている液体について粘度測定を行えばよい。粘度の知られている液体としては、表1のような特性をもつ3種の市販の粘度計校正用標準液を使用した。

いろいろの引上速度で測定を行い、Stokesの法則が成り立つと仮定して、見掛けの粘度 η^* を求め、 v と η^* とのグラフを作って、 $v \rightarrow 0$ の極限に対応する η^* の値が試料液体の粘度 η であるとする。

それぞれの標準液についての測定の結果が図6, 7, 8に示されている。

いずれの標準液についても、得られた η は表1の値とかなりよく一致している。これは、液体引上式粘度計で粘度の絶対測定ができることを示している。

4.5 Oseenの式の検討

Oseenの式(7)を基として式(13)が得られ、ひいては落球

表1 JS標準液の特性

標準液	温度(°C)	粘度(P)	動粘度(St)	密度(g/cm ³)
JS 500	20.0	4.50	5.093	0.8835
~1000	20.0	8.979	10.110	0.8879
~2000	20.0	18.140	20.430	0.8877

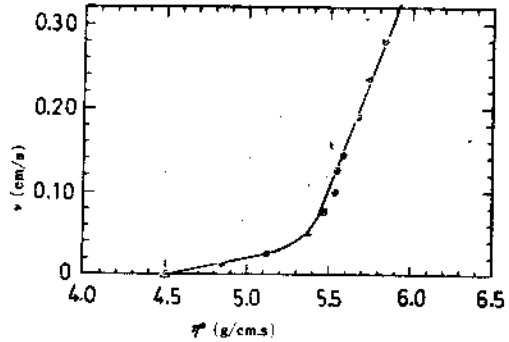


図6 v と η^* との関係(JS500)

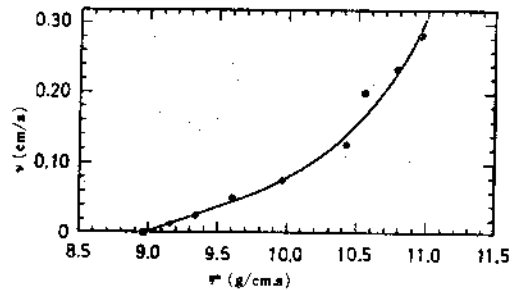


図7 v と η^* との関係(JS1000)

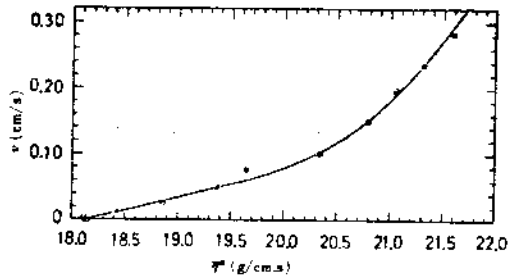


図8 v と η^* との関係(JS2000)

粘度計での粘度測定の際に、所期の精度で粘度が知られるために R_0^* が満たすべき条件が導かれている。このように、Oseenの式は粘度測定に重要な意味をもっている。

Oseenの式が正しく成り立つか否かは、液体引上式粘度計での実験の結果によって調べることができる。

式(13)を書き換えて、

$$\frac{\eta^*}{\eta} = \frac{1}{1 - \frac{3}{16} R_0^*} \approx 1 + \frac{3}{16} R_0^* \dots\dots\dots (22)$$

の形とする。この式が正しいならば、 η^*/η と R_0^* との関係は液体の種類によらない。

図9(次ページ)の太い曲線は式(22)の関係を示し、曲線I, II, IIIはそれぞれJS 500, 1000, 2000の各標準液についての実測値による関係を示す曲線である。これらの曲線は、標準液のいずれについても、式(22)が成り立たな

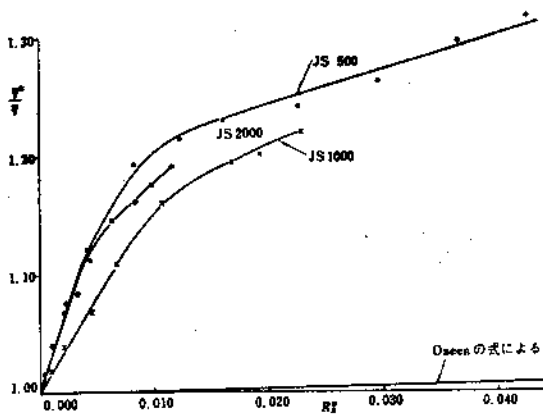


図9 $\frac{\eta^*}{\eta}$ と R_0^* との関係

いことを示している。ただし、 R_0^* の増加につれて η^*/η も大きくなることは、明らかに認められる。

さらに、各標準液についての曲線が一致していない。なお、この実験では、誤差が±2%の程度であるから、Oseenの式からみれば R_0^* が0.1まではこの誤差範囲の値が得られるはずであるが、 $R_0^* = 0.01$ でも η^*/η が1.1以上となり、予期されるところとかなり異なっている。

5. 液体引上式二球粘度計¹⁾

前述の液体引上式粘度計では、精度のよい粘度測定をするためには、吊糸に及ぼされる粘性力などの影響を、考慮に入れなければならない。これらの力を考えに入れてもよいように改良されたのが二球粘度計である。

5.1 二球粘度計の測定原理

図10はこの測定原理を説明するための図である。A、Bは径の異なる2個の球で、試料液体Cの中に同じ太さの細い糸で吊されており、その両方の糸の液中有る部分の長さは等しいとする。Dは試料液体を入れる容器で、

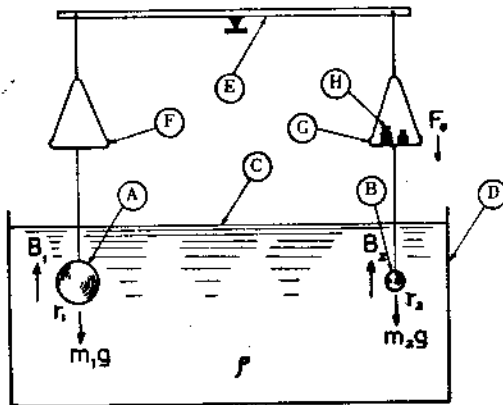


図10 液体引上式二球粘度計

微小な一定速度で引き上げられるようになっている。Eは天秤、F、Gは秤皿、Hは分銅である。2個の球の直径をそれぞれ D_1 、 D_2 ($D_1 > D_2$)とし、両球の質量をそれぞれ m_1 、 m_2 とする。

試料液体が静止しているとき、すなわち、引上速度が0であるときには(鉛直上向きを正の方向とする)。

$$-m_1g + B_1 + m_2g - B_2 + F_0 = 0 \quad \dots \dots \dots 23$$

である。ここに、 B_1 、 B_2 は両球の受けている浮力である。また、秤皿Gに乗せられている分銅の質量を w_2 とすると。

$$F_0 = w_2g \quad \dots \dots \dots 24$$

である。

つぎに、試料液体が一定の微小速度 v で引き上げられているとする。両球はそれぞれ Stokes の法則による抗力 $3\pi\eta v D_1$ 、 $3\pi\eta v D_2$ および両方の吊糸に及ぼされている等しい抗力 f が作用している。

この状態で皿Fに質量 w_1 の分銅を乗せて天秤がバランスするとする。この場合には、球Aに $F_1 = w_1g$ の力が下向きに及ぼされることになり、

$$\begin{aligned} -m_1g + B_1 + 3\pi\eta v D_1 - F_1 - f \\ + m_2g - B_2 - 3\pi\eta v D_2 + F_2 + f = 0 \quad \dots \dots \dots 25 \end{aligned}$$

である。この式25と前の式23とから

$$3\pi\eta v (D_1 - D_2) = F_1 - w_1g \quad \dots \dots \dots 26$$

の関係の存在することが知られる。それで、 w_1 を測定すれば、

$$\eta = \frac{w_1g}{3\pi v (D_1 - D_2)} \quad \dots \dots \dots 27$$

によって、粘度 η が求められる。

Stokesの法則が厳密には成り立たない場合にも Stokes の法則が成り立つと仮定して式27によって算出して得られる粘度を見掛けの粘度として η^* で表わすことにする。

両球の受ける抗力について、Oseenの式(7)が適用されるとすると、式27の代わりに、

$$\eta = \frac{w_1g}{3\pi v (D_1 - D_2) \left\{ 1 + \frac{3}{16} \frac{\rho v}{\eta} (D_1 + D_2) \right\}} \quad \dots \dots \dots 28$$

となり、 η^*/η は

$$\frac{\eta^*}{\eta} = 1 + \frac{3}{16} \frac{\rho v}{\eta} (D_1 + D_2) \quad \dots \dots \dots 29$$

で与えられる。

式(13)と式29とを比較すると、1個の球の場合には v が大きくなるにつれて比 η^*/η が大きくなることは、2球の場合にも同様であることが認められる。

5.2 試作二球粘度計

試作した液体引上式二球粘度計は、だいたいは単一球

1) 芝 亀吉, 杜沢達美: 応用物理 第44巻(1975), P. 242~246