

円筒及び円板の熱応力計算法

—Timoshenko 法と Poritsky 法の比較と等価性の証明—

岸井 貫

千葉工業大学, 275 千葉県習志野市津田沼 2-17-1

Methods of Thermal Stress Calculation for Circular Cylinders and Disks
—Comparison Results by Timoshenko's and Poritsky's Methods
and the Equivalence of the Methods—

Toru KISHII

Chiba Institute of Technology, 2-17-1, Tsudanuma, Narashino-shi, Chiba 275

[Received January 20, 1993; Accepted May 21, 1993]

Two methods of thermal stress calculation by Timoshenko's method and Poritsky's method for circular cylinders and disks were discussed, and the results of calculation were compared. The first method was given by Timoshenko based on the integration of a temperature \times distance from central axis function, and the other was that given by Poritsky based on multi-variant simultaneous equations which represent elastical balances of principal stresses and strains in a cylinder and a disk. Calculations were carried out for the following four cases: a solid cylinder, a cylinder with a concentric hole, a solid disk and a disk with a concentric hole. The results obtained by the two methods were identical for the four cases. It was proved that the two methods were mathematically equivalent.

Key-words: Thermal stress, Computer, Elasticity, Calculation, Simultaneous equations, Composites

1. 緒言

複合材料で材料特性が場所により異なることが原因で発生する応力の計算には、次の二つの方法がある：

(A) 材料中の熱応力を求める式^{1a)~1d)}において、温度不均一による膨張差を場所による材料特性の違いによる膨張差に読み換えて適用する^{1e),2)~4)}。

(B) 異なる材料を接着又は融着した場合の式を適用する^{5)~9)}。

このように上記二つの方法の間には密接な関係があるので、(B)法を熱応力計算に流用することもできる¹⁰⁾。円筒と円板についてこれを実行してみたところ、(A)法の結果と大変良く一致することを見いだした。そこで更にこれらの方法を細部にわたり検討して、二つの方法が数学的にも等価であることを証明できた。本報ではこの経過を記す。

2. 円筒、円板の熱応力計算：Timoshenko 法

2.1 円筒の場合^{1a)}

円筒に軸対称な温度分布がある場合に生ずる熱応力は Timoshenko らにより(1.1)~(1.3)式で表わされる：半径方向応力

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} K - \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r \, dr \right) \quad (1.1)$$

接線方向応力

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} K + \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r \, dr \right) \quad (1.2)$$

軸方向応力

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} (\text{定数} - T)$$

断面にわたる軸方向応力の積分が零である (条件 T1) という条件で定数をきめると¹⁰⁾

軸方向応力

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2} K - T \right) \quad (1.3)$$

ただし

$$K = \int_0^b T \cdot r \, dr$$

ここで、 b は円筒の半径、 r は中心からの距離、 T は r の関数としての温度、 σ は応力、 σ の添字は r :半径方向、 θ :接線方向、 z :軸方向、を表し、 α は熱膨張係数、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。 T の場所による差が熱膨張 $\alpha \cdot T$ の差となり、熱応力を引き起こす。

2.2 円板の場合^{1b)}

2.1節の式の導出に当たり軸方向応力を零と仮定すると、円板の応力を表す式になる。

すなわち

$$\sigma_r = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} K - \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r \, dr \right)$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} K + \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r \, dr - T \right)$$

2.3 穴が開いている場合^{1c),1d)}

穴の内表面で σ_r が零であるとして、同心円形の穴を持つ円筒、円板にも式を導くことができる。

2.4 コンピューターによる計算

もしも $T \cdot r$ が r についてコンピューター言語上で積分可能な関数であると、プログラム化も計算も容易である。温度分布が折線型で連続的であっても階段型分布のように

不連続的であっても、 $T \cdot r$ が積分可能なので応力の計算ができる。

2.5 計算の応用

これらの式は、 αT の代わりに場所による膨張特性差を入れると不均質材料中の応力計算^{1e),3)}に、熱履歴を不均等に受けて生じた膨張の差を入れると熱強化ガラス中の応力の計算¹⁰⁾にそれぞれ利用できる。

3. 円筒, 円板の熱応力計算: Poritsky 法^{5)~9)}

3.1 円筒の場合

円筒形封着体中の各層を、内外面と端面に応力を受けている円管又は円柱とみなし(図1), それらの中での応力の分布を次の形の式で表わす:

$$\sigma_r = A - B/r^2 \quad (2.1)$$

$$\sigma_\theta = A + B/r^2 \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = C \quad (2.3)$$

A, B, C は各層ごとにそれぞれ割当てられる定数

これらの式を使って、封着体内部での力の平衡条件

$r=0$ で応力は有限 条件(P1)

境界面で σ_r は連続 条件(P2)

外表面で $\sigma_r=0$ 条件(P3)

σ_z を断面にわたり積分すると零 条件(P4)

と、層間でも層の中でも破壊しない(歪, 変位が連続)という条件

すなわち

接線方向の歪み e_θ の連続性

$$e_{\theta 1} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{\theta 1} - \nu(\sigma_{r 1} + \sigma_{z 1}) \} + \alpha T_1$$

$$= \frac{1}{E} \{ \sigma_{\theta 2} - \nu(\sigma_{r 2} + \sigma_{z 2}) \} + \alpha T_2 = e_{\theta 2} \quad \text{条件(P5)}$$

と軸方向の歪み e_z の連続性

$$e_{z 1} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{z 1} - \nu(\sigma_{r 1} + \sigma_{\theta 1}) \} + \alpha T_1$$

$$= \frac{1}{E} \{ \sigma_{z 2} - \nu(\sigma_{r 2} + \sigma_{\theta 2}) \} + \alpha T_2 = e_{z 2} \quad \text{条件(P6)}$$

とを書き下ろして、全部の A, B, C を未知数とする多元一

次連立方程式を作り、これを解いてすべての A, B, C を決めると円筒中の応力を計算できる。ここで添字1, 2は隣り合う二つの層を区別するものである。

これらの誘導に当たり、層間の材質差による膨張差の代わりに温度差による膨張差を入れると、熱応力が得られる。

3.2 円板の場合¹⁰⁾

3.1節の式を作る過程ですべての C を零と置くと円板に関する解が得られる。

3.3 中心に穴がある場合

2.3節と同じ仮定を使って誘導できる。

4. 計算例

はじめに計算例を掲げる。

材料の性質として $E=7000 \text{ kg/mm}^2$, $\alpha=100 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\nu=0.25$ とした。これはソーダ石灰ガラスのものに近い。比較の便宜上、温度差の最大値を 100°C にした。このときの応力の値は 7 kg/mm^2 以内である。

4.1 計算上の留意点

Poritsky法では温度分布は階段型の不連続なものに限定される。したがって比較のため、Timoshenko法でも階段型の同じ温度分布を仮定した。Timoshenko法は温度分布が一意、有限で $T \cdot r$ が積分可能であれば階段型でなくとも適用できる。

Poritsky法を熱応力計算に適用する場合には、すべての層の性質に同じ値を割り当てるので、計算途中で「零で割る」エラーが出やすい。この対策としては

- (1) 式の配列順を試行錯誤的に変更する、
- (2) 変数の配列順を試行錯誤的に変更する、
- (3) 材料定数を結論に影響を与えない限度(本報では2%以内)で揺らせる、

がある。本報では E に対して最後の方法を適用した。

4.2 計算例による実証

熱応力では $(r/b)-T$ 関係によって (r/b) -(応力)関係が決まるという性質があるので、図2, 図3, 図4, 図5では、横軸には r の絶対値ではなく中心軸($r=0$)と外縁($r=b$)とだけを示しておき、縦軸に応力を取った。

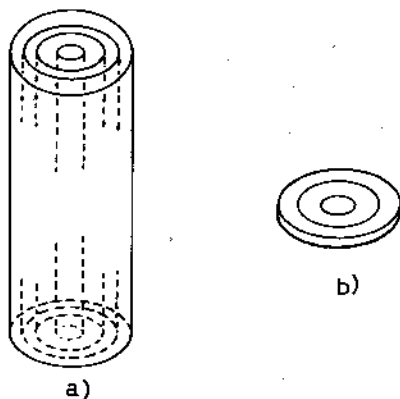


Fig. 1. Multi-layered a) cylindrical hermetic seal and b) disk-like seal.

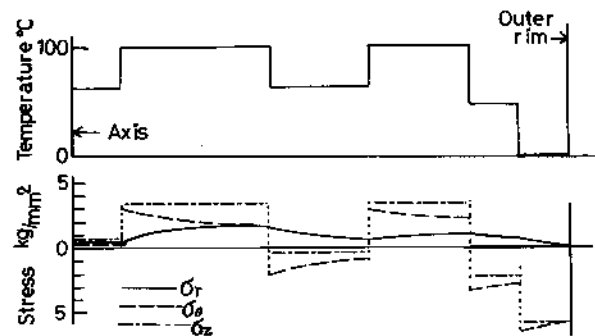


Fig. 2. Thermally induced radial stress σ_r , tangential stress σ_θ , and axial stress σ_z distributions along radius in a solid cylinder. The temperature distribution used for the calculation is shown in the upper part of the figure.

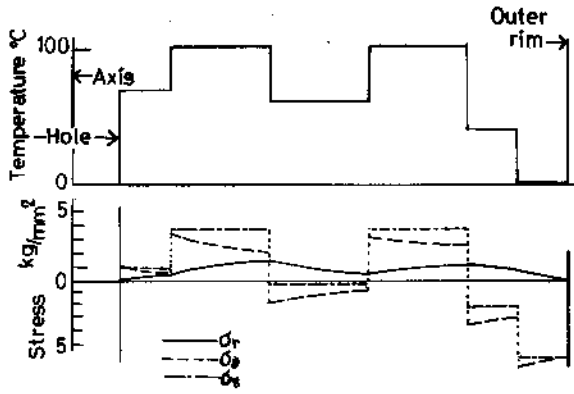


Fig. 3. Thermally induced radial stress σ_r , tangential stress σ_θ and axial stress σ_z distributions along radius in a cylinder with a concentric hole. The temperature distribution used for the calculation is shown in the upper part of the figure.

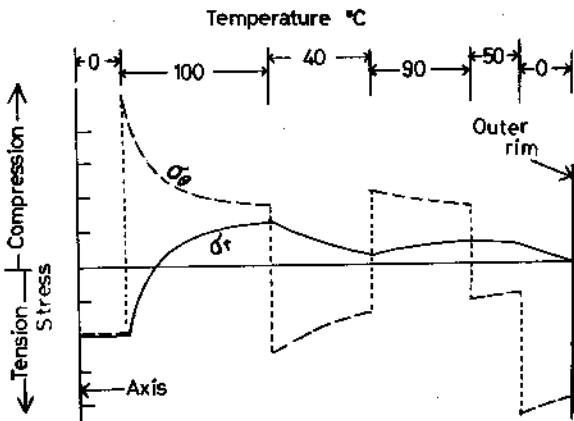


Fig. 4. Thermally induced radial stress σ_r and tangential stress σ_θ distributions along radius in a solid disk. The temperature distribution used for the calculation is shown in the upper part of the figure. Stress : 1 kg/mm²/division.

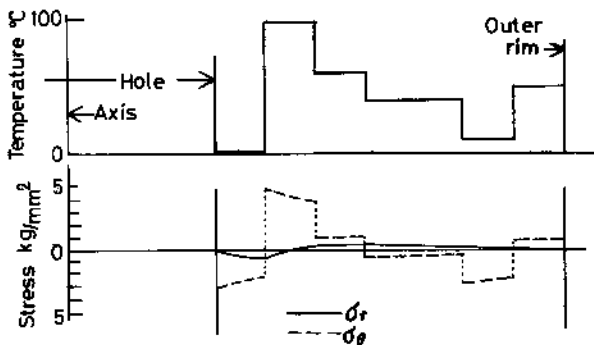


Fig. 5. Thermally induced radial stress σ_r and tangential stress σ_θ distributions along radius in a disk with a concentric hole. The temperature distribution used for the calculation is shown in the upper part of the figure.

中実円筒の例を図2に、穴開き円筒の例を図3に、中実円板の例を図4に、穴開き円板の例を図5に掲げた。いずれも二つの方法による計算の結果が良く一致したので、図では計算の方法を区別していない。

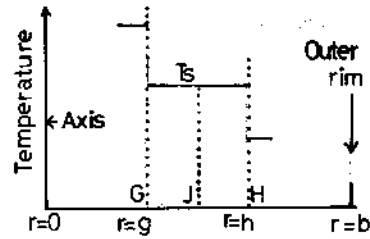


Fig. 6. A schematic representation of a part of a step-like temperature distribution curve.

5. 数学的等価性の証明

第一段階として、階段型の温度分布の場合に二つの方法が等価であることを証明する。そのほかの温度分布は階段型のもの温度軸の区切りをこまかくした極限と考えると、この場合にも両者が同等だと言える。

5.1 式の形の比較

はじめに区間0~rにわたる $T \cdot r$ の積分は連続関数であることを注意する。また階段型温度分布曲線の一部を取り出した図6において、半径軸上の区間G~H ($r=g \sim r=h$) で温度は一定 (T_s) であり、その両隣では別の温度値であるとする。区間G~H内に一般の点J (半径の値を一般の値 r とする) があると、点Jにおける応力を考える。(1.1), (1.2)式の括弧の中の第一項は定数 K/b^2 である。第二項の積分を区間 ($r=0 \sim$ 点G) での積分と区間 (点G~点J) での積分とに分けて書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r \, dr &= \frac{1}{r^2} \int_0^g T \cdot r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_g^r T_s \cdot r \, dr \\ &= \frac{Q}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{T_s}{2} r^2 \right]_g^r \\ &= \frac{1}{r^2} \left(Q - \frac{T_s}{2} g^2 \right) + \frac{T_s}{2} \end{aligned}$$

ただし

$$Q = \int_0^g T \cdot r \, dr$$

は区間 (G~H) 内では定数である。

この結果を利用し

$$A = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{b^2} K - \frac{T_s}{2} \right), \quad B = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(Q - \frac{T_s}{2} g^2 \right)$$

と置くと

$$\sigma_r = A - B/r^2, \quad \sigma_\theta = A + B/r^2$$

となり、それぞれ(2.1), (2.2)式で表現される。(1.3)式は区間 (G~H) で定数であり、この定数 C は

$$C = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2}{b^2} K - T_s \right)$$

と書けて、 σ_z が(2.3)式で表される。

5.2 境界条件, 平衡条件の一致

(1.1)式は連続関数であるから条件(P1)を満たす。また条件(P2), (P3)を満たすことは自明である。(1.1)~(1.3)式を条件(P5), (P6)式に代入して検算すると、(1.1)~(1.3)式は条件(P5), (P6)式を満たすことがわかる。最後に条件(T1)は条件(P4)と同じである。

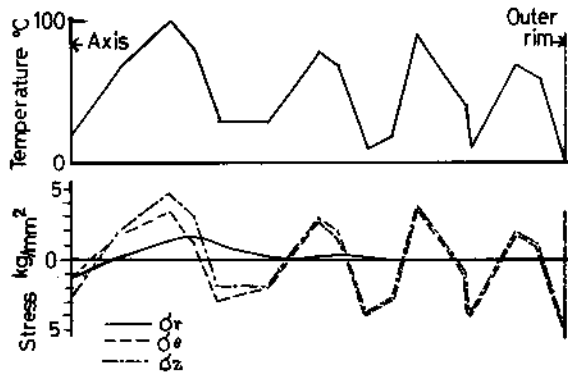


Fig. 7. A test calculation of thermal stresses in a solid cylinder with a continuous temperature distribution.

5.3 等価性

このように階段型温度分布の場合には、Timoshenko 法による応力は Poritsky 法のそれと同じ形の式で表され、かつ Poritsky 法が要求する条件式をすべて満たす。それ故 Timoshenko 法による応力は同時に Poritsky 法の解として得られる応力である。言い換えれば両方法は数学的に等価・同等である。これは温度分布の区間の数が多く各区間の幅が狭くても成り立つ。

一般的な形の温度分布は階段型分布の極限と見なせるから、この場合にも同じことを結論できる。

階段型でない温度分布に対して Timoshenko 法で円筒の熱応力を計算した例を図 7 に掲げた。

円板の場合にも同様の論法で同じ結論を導くことができる。

更に同じ論法と結論を、中心に同心円的に穴を持つ円筒、円板に適用することができる。

6. 結 び

Timoshenko 法と Poritsky 法とによる応力の表現式と計算の過程とが、一見互いに大変異なるのに、詳しく調べると数学的に等価であるということが証明された。この知見により二つの方法の本質が更に明確になったと言える。これらの方法は緒言で述べたとおり応用範囲が広いので、ますます活用されて欲しい。

これらの方法は幾らかの変更をして中実球、中空球にも適用できる。

文 献

- 1) S. Timoshenko and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York (1970).
1a) p. 443; 1b) p. 441; 1c) p. 448; 1d) p. 442; 1e) p. 446; 1f) p. 445; 1g) p. 452, p. 453; 1h) p. 455.
- 2) "JSME Mechanical Engineers, Handbook, A, Fundamentals, 4A: Strength of Materials", JSME (1984) p. 68.
- 3) M. Yamane and S. Noda, *J. Ceram. Soc. Japan*, 101, 11-21 (1993).
- 4) 岸井 貫, *The Glass-Technology and Communication*, 投稿中.
- 5) H. Poritsky, *Physics*, 5, 406-14 (1934).
- 6) A. W. Hull and E. E. Burger, *Physics*, 5, 384-405 (1934).
- 7) A. W. Hull, *J. Appl. Phys.*, 17, 685-87 (1946).
- 8) 関谷 壯, 角 誠之助, 谷村真治, 岡本正明, 金岡昭治, "最新材料力学", 朝倉書店 (1990) p. 149, p. 153.
- 9) 岸井 貫, *東芝レビュー*, 14, 851-56 (1959).
- 10) 岸井 貫, *The Glass-Technology and Communication*, No. 22, 28-33 (1991).